

Inegalități de tip Chebyshev-Grüss pentru operatorii Bernstein-Euler-Jacobi

Heiner Gonska*, Maria-Daniela Rusu*, Elena-Dorina Stănilă*

Abstract

The classical form of Grüss' inequality was first published by G. Grüss and gives an estimate of the difference between the integral of the product and the product of the integrals of two functions. In the subsequent years, many variants of this inequality appeared in the literature. The aim of this paper is to consider some Chebyshev-Grüss-type inequalities and apply them to the Bernstein-Euler-Jacobi (BEJ) operators of first and second kind. The first and second moments of the operators will be of great interest.

2010 AMS Subject Classification : 41A17, 41A36, 26D15.

Key Words and Phrases: Chebyshev functional, Chebyshev-type inequality, Grüss-type inequality, Chebyshev-Grüss-type inequalities, Bernstein-Euler-Jacobi (BEJ) operators of first and second kind, first and second moments.

1 Introducere

În cele ce urmează vom prezenta rezultate clasice din literatură.

Inegalitățile de tip Chebyshev-Grüss au fost intens studiate de-a lungul anilor, mai ales datorită numeroaselor aplicații. Ele reprezintă legătura între funcționala lui Chebyshev și inegalitatea lui G. Grüss.

Funcționala descrisă de

$$T(f, g) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx,$$

unde $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții integrabile, este binecunoscută în literatură drept funcționala clasică a lui Chebyshev. Pentru detalii, articolul [3] poate fi de ajutor.

Un prim rezultat pe care îl readucem în atenția cititorului este dat de următoarea teoremă.

Teoremă 1.1. *(vezi [16]) Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții mărginite și integrabile, ambele crescătoare sau descrescătoare. Mai mult, fie $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ o funcție mărginită și integrabilă.*

*University of Duisburg-Essen, Faculty of Mathematics, Forsthausweg 2, 47057 Duisburg, Germany
E-mails: heiner.gonska@uni-due.de, maria.rusu@uni-due.de, elena.stanila@stud.uni-due.de

Atunci avem

$$(1.1) \quad \int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x) \cdot f(x) \cdot g(x)dx \geq \int_a^b p(x) \cdot f(x)dx \int_a^b p(x) \cdot g(x)dx.$$

Dacă una din funcțiile f sau g este crescătoare și cealaltă este descrescătoare, atunci inegalitatea (1.1) se inversează.

Remarcă 1.1. Relația (1.1) a fost introdusă pentru prima oară de către P. L. Chebyshev în 1882 (vezi [2]). Din acest motiv, este cunoscută sub numele de inegalitatea lui Chebyshev.

În continuare amintim unul din rezultatele esențiale pe care se bazează cercetarea noastră, și anume inegalitatea lui Grüss pentru funcționala lui Chebyshev.

Teoremă 1.2. (vezi [11]) Fie f, g funcții integrabile, definite pe intervalul $[a, b]$ cu valori în \mathbb{R} , astfel încât $m \leq f(x) \leq M$, $p \leq g(x) \leq P$, pentru orice $x \in [a, b]$, unde $m, M, p, P \in \mathbb{R}$. Atunci are loc inegalitatea

$$(1.2) \quad |T(f, g)| \leq \frac{1}{4}(M - m)(P - p).$$

Următoarele inegalități de tip Chebyshev-Grüss vor fi folosite în continuare, pentru a introduce rezultatele noastre.

Teoremă 1.3. (vezi [21]) Dacă $f, g \in C[a, b]$ și $x \in [a, b]$ este fixat, atunci are loc inegalitatea

$$(1.3) \quad |T(f, g; x)| \leq \frac{1}{4} \tilde{\omega} \left(f; 2 \cdot \sqrt{H((e_1 - x)^2; x)} \right) \cdot \tilde{\omega} \left(g; 2 \cdot \sqrt{H((e_1 - x)^2; x)} \right).$$

Remarcă 1.2. Rezultatul de mai sus implică folosirea celui mai mic majorant concav $\tilde{\omega}$ al primului modul de continuitate. O definiție și detalii cu privire la acesta se găsesc, de exemplu, în [8].

Remarcă 1.3. Scopul nostru este să aplicăm inegalitatea de mai sus în cazul operatorilor BEJ de tipul I și II, pentru diferite cazuri, luând în considerare diferitele momente de ordinul doi.

În cazul operatorilor liniari și pozitivi care reproduc funcțiile constante, dar nu le reproduc pe cele liniare, avem următorul rezultat.

Teoremă 1.4. (vezi Corolarul 5.1. din [8]) Dacă $H : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ este un operator liniar și pozitiv, care reproduce funcții constante, atunci pentru $f, g \in C[a, b]$ și $x \in [a, b]$ fixat, au loc următoarele inegalități:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} |T(f, g; x)| &\leq \frac{1}{4} \cdot \tilde{\omega} \left(f; 2 \cdot \sqrt{H(e_2; x) - H(e_1; x)^2} \right) \cdot \tilde{\omega} \left(g; 2 \cdot \sqrt{H(e_2; x) - H(e_1; x)^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \cdot \tilde{\omega} \left(f; 2 \cdot \sqrt{H((e_1 - x)^2; x)} \right) \cdot \tilde{\omega} \left(g; 2 \cdot \sqrt{H((e_1 - x)^2; x)} \right). \end{aligned}$$

Remarcă 1.4. Pentru a aplica inegalitatea de mai sus unora din cazurile operatorilor BEJ de tipul I sau II, avem în primul rând nevoie de momentele de ordinul întâi. Apoi trebuie să calculăm diferențe de tipul $T(e_1, e_1; x) := H(e_2; x) - H(e_1; x)^2$. Dacă operatorul H nu reproduce funcțiile liniare, se obține o îmbunătățire a inegalității (1.3).

Operatorii Bernstein-Euler-Jacobi (BEJ) sunt împărțiți în două clase: BEJ de tip *I* și BEJ de tip *II*. Scopul acestui articol este de a aplica inegalitățile de tip Chebyshev-Grüss de mai sus acestor tipuri de operatori. În rezultatele următoare momentele de ordinul unu și cele de ordinul doi vor fi de mare interes.

Operatorii BEJ de tipul *I*, ca și clasă de operatori pozitivi și liniari, pot fi definiți după cum urmează. Pentru mai multe detalii, vezi [23].

Definiție 1.5. *Definim $R_{m,n}^{(r,a,b)} : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ca fiind compoziția*

$$R_{m,n}^{(r,a,b)} = B_m \circ \mathcal{B}_r^{a,b} \circ B_n,$$

pentru $r > 0$, $a, b \geq -1$, $n, m > 1$. În ecuația de mai sus, $\mathcal{B}_r^{a,b}$ este operatorul Euler-Jacobi-Beta definit în [9] și B_n, B_m sunt operatorii Bernstein de ordin n și m .

Remarcă 1.5. *Operatorii BEJ de tip *I* reproduc constantele. Pentru anumite valori ale lui a , respectiv b , și anume pentru $a = b = -1$, sunt reproduse și funcțiile liniare.*

A doua clasă de operatori liniari și pozitivi pe care îi considerăm sunt BEJ de tipul *II*. Definiția este dată în continuare.

Definiție 1.6. *Pentru $r, s > 0$, $a, b, c, d \geq -1$ și $n > 1$, definim $R_n^{s,c,d;r,a,b} : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ca fiind*

$$R_n^{s,c,d;r,a,b} = \mathcal{B}_s^{c,d} \circ B_n \circ \mathcal{B}_r^{a,b}.$$

$\mathcal{B}_r^{a,b}$ și $\mathcal{B}_s^{c,d}$ sunt operatori de tip Euler-Jacobi Beta și B_n este operatorul Bernstein de ordin n .

Remarcă 1.6. *Operatorii BEJ de tip *II* reproduc constantele. Pentru anumite valori ale lui a, b și c, d , și anume pentru $a = b = c = d = -1$, sunt reproduse și funcțiile liniare.*

2 Momentele de ordinul unu și doi

Lemă 2.1. *Pentru clasa de operatori **BEJ de tipul *I*** momentele de ordinul 1 și 2 sunt date de:*

$$(2.1) \quad R_{m,n}^{(r,a,b)}((e_1 - xe_0)^1; x) = \frac{a + 1 - x(a + b + 2)}{r + a + b + 2}.$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} R_{m,n}^{(r,a,b)}((e_1 - xe_0)^2; x) = & \frac{x^2[mn(a^2 + b^2 + 5a + 5b + 2ab + 6 - r) + r^2(1 - m - n)]}{mn(r + a + b + 2)(r + a + b + 3)} - \\ & - \frac{x[mn(2a^2 + 2ab + 8a + 2b + 6 - r) + r^2(1 - m - n) + mr(a - b)]}{mn(r + a + b + 2)(r + a + b + 3)} + \\ & + \frac{[mn(a + 1)(a + 2) + m(r(a + 1) + ab + a + b + 1)]}{mn(r + a + b + 2)(r + a + b + 3)} \end{aligned}$$

Pentru detalii în ceea ce privește demonstrația, vezi [23].

Lemă 2.2. Pentru clasa de operatori **BEJ de tipul II** momentele de ordinul 1 și 2 sunt date de:

$$(2.3) \quad R_n^{(s,c,d;r,a,b)}((e_1 - xe_0)^1; x) = \frac{-x[r(c+d+2) + (a+b+2)(s+c+d+2)]}{(r+a+b+2)(s+c+d+2)} + \\ + \frac{r(c+1) + (s+c+d+2)(a+1)}{(r+a+b+2)(s+c+d+2)}.$$

$$(2.4) \quad R_n^{(s,c,d;r,a,b)}((e_1 - xe_0)^2; x) = \frac{(n-1)(a^2 + b^2 + 2ab + 5a + 5b + 6 - r)(sx + c + 1)(sx + c + 2)}{n(r+a+b+2)(r+a+b+3)(s+c+d+2)(s+c+d+3)} + \\ + \frac{(a^2 + b^2 + 2ab + 5a + 5b + 6 - r - n(2ab + 2a^2 + 8a + 2b + 6 - r))(sx + c + 1)}{n(r+a+b+2)(r+a+b+3)(s+c+d+2)} + \\ + \frac{a^2 + 3a + 2}{(r+a+b+2)(r+a+b+3)} + \frac{(sx + c + 1)(sx + c + 2)}{n(s+c+d+2)(s+c+d+3)} - \\ - \frac{sx + c + 1}{n(s+c+d+2)} - \frac{c^2 + d^2 + 2cd + 5c + 5d + 6 - s}{(s+c+d+2)(s+c+d+3)}x^2 + \\ + \frac{2cd + 2c^2 + 8c + 2d + 6 - s}{(s+c+d+2)(s+c+d+3)}x - \frac{c^2 + 3c + 2}{(s+c+d+2)(s+c+d+3)} + \\ + \frac{2r(sx + c + 1)}{n(r+a+b+2)(s+c+d+2)} - \frac{2r(sx + c + 1)(sx + c + 2)}{n(r+a+b+2)(s+c+d+2)(s+c+d+3)} + \\ + \frac{2r(sx + c + 1)(sx + c + 2)}{(r+a+b+2)(s+c+d+2)(s+c+d+3)} + \frac{2(a+1-x(2r+a+b+2))(sx + c + 1)}{(r+a+b+2)(s+c+d+2)} - \\ - \frac{2(a+1)x}{r+a+b+2} + 2x^2.$$

Pentru detalii în ceea ce privește demonstrația, vezi [23].

Mulți operatori uzuali pot fi regăsiți dacă particularizăm valorile indicilor. Astfel în primele cinci tabele prezentate în Anexă regăsim momentele de ordinul doi, pentru cazurile particulare pe care am reușit să le localizăm în literatură, determinate pe baza ecuațiilor (2.2) și (2.4), folosind convenția $B_\infty = \mathcal{B}_\infty^{a,b} = Id$.

3 Inegalități Chebyshev-Grüss pentru operatorii BEJ de tip I și II

În continuare aplicăm inegalitatea de tip Chebyshev-Grüss, dată de (1.3), operatorilor BEJ de tipul I și II și obținem următoarele teoreme.

Teoremă 3.1. Dacă $f, g \in C[a, b]$ și $x \in [a, b]$ este fixat, atunci inegalitatea

$$|T(f, g; x)| \leq \frac{1}{4} \tilde{\omega} \left(f; 2 \cdot \sqrt{R_{m,n}^{(r,a,b)}((e_1 - x)^2; x)} \right) \cdot \tilde{\omega} \left(g; 2 \cdot \sqrt{R_{m,n}^{(r,a,b)}((e_1 - x)^2; x)} \right)$$

are loc, pentru $r > 0$, $a, b \geq -1$, $n, m > 1$.

Teoremă 3.2. Dacă $f, g \in C[a, b]$ și $x \in [a, b]$ este fixat, atunci inegalitatea

$$|T(f, g; x)| \leq \frac{1}{4} \tilde{\omega} \left(f; 2 \cdot \sqrt{R_n^{(s,c,d;r,a,b)}((e_1 - x)^2; x)} \right) \cdot \tilde{\omega} \left(g; 2 \cdot \sqrt{R_n^{(s,c,d;r,a,b)}((e_1 - x)^2; x)} \right)$$

are loc, pentru $r, s > 0$, $a, b, c, d \geq -1$, $n > 1$.

Remarcă 3.1. Particularizând valorile indicilor în ecuațiile (2.2) și (2.4), obținem inegalitățile Chebyshev-Grüss corespunzătoare operatorilor binecunoscuți în literatură. Momentele de ordinul doi în cazurile particulare sunt prezentate în Tabelele 1 – 5 din Anexă.

Dacă aplicăm inegalitatea (1.4) operatorilor BEJ de tipul I și II care nu reproduc funcțiile liniare, obținem următorul rezultat.

Teoremă 3.3. Pentru $f, g \in C[a, b]$ și $x \in [a, b]$ fixat, următoarea inegalitate are loc:

$$|T(f, g; x)| \leq \frac{1}{4} \cdot \tilde{\omega} \left(f; 2 \cdot \sqrt{T(e_1, e_1; x)} \right) \cdot \tilde{\omega} \left(g; 2 \cdot \sqrt{T(e_1, e_1; x)} \right).$$

Diferențele de mai sus sunt date de ecuațiile:

$$T(e_1, e_1; x) := R_{m,n}^{(r,a,b)}((e_1 - xe_0)^2; x) - [R_{m,n}^{(r,a,b)}((e_1 - xe_0)^1; x)]^2,$$

respectiv

$$T(e_1, e_1; x) := R_n^{(s,c,d;r,a,b)}((e_1 - xe_0)^2; x) - [R_n^{(s,c,d;r,a,b)}((e_1 - xe_0)^1; x)]^2.$$

Remarcă 3.2. Momentele de ordinul întâi și diferențele de tip $T(e_1, e_1; x)$ pentru cazurile particulare se regăsesc în Tabelele 6 – 7 din Anexă.

4 Anexă

Notăție	Denumire	Momentul de ordinul doi	Referințe
$U_n =$ $R_{n,\infty}^{(n,-1,-1)} =$ $R_n^{\infty,-,-;n,-1,-1}$	operatorul "original" Bernstein-Durrmeyer	$U_n((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{2X}{n+1}$	[4] [10]
$M_n =$ $R_{n,\infty}^{(n,0,0)} =$ $R_n^{\infty,-,-;n,0,0}$	operatorul lui Durrmeyer	$M_n((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{2X(n-3)+2}{(n+2)(n+3)}$	[5]
$D^{<\alpha>} =$ $R_{n,\infty}^{(n,\alpha,\alpha)} =$ $R_n^{\infty,-,-;n,\alpha,\alpha}$	operatorul Bernstein-Durrmeyer cu ponderi simetrice	$D^{<\alpha>}((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{X(2n-4a^2-10a-6)+(a+1)(a+2)}{(n+2a+2)(n+2a+3)}$	[13]
$M_n^{ab} =$ $R_{n,\infty}^{(n,a,b)} =$ $R_n^{\infty,-,-;n,a,b}$	operatorul lui Durrmeyer cu ponderi Jacobi	$M_n^{ab}((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{a^2+b^2+2ab+5a+5b+6-2n}{(n+a+b+2)(n+a+b+3)} \cdot x^2$ $-\frac{2a^2+2ab+8a+2b+6-2n}{(n+a+b+2)(n+a+b+3)} \cdot x + \frac{(a+1)(a+2)}{(n+a+b+2)(n+a+b+3)}$	[18]
$U_n^g =$ $R_{n,\infty}^{(ng,-1,-1)} =$ $R_n^{\infty,-,-;ng,-1,-1}$	g -operatorul lui Păltănea	$U_n^g((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{X(1+g)}{ng+1}$	[19]
$P_n =$ $R_{n,\infty}^{(nc,a,b)} =$ $R_n^{\infty,-,-;nc,a,b}$	operatorul lui Mache-Zhou	$P_n((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{a^2+b^2+2ab+5a+5b+6-nc-nc^2}{(nc+a+b+2)(nc+a+b+3)} \cdot x^2$ $-\frac{(2a^2+2ab+8a+2b+6-nc-nc^2) \cdot x + (a+1)(a+2)}{(nc+a+b+2)(nc+a+b+3)}$	[15]
$L_n^\nabla =$ $R_{\infty,n}^{(n,-1,-1)} =$ $R_n^{n,-1,-1;\infty,-,-}$	operator de tip Stancu	$L_n^\nabla((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{2X}{2+1}$	[14]
$V_n^{0,0} =$ $R_{\infty,n}^{(n,0,0)} =$ $R_n^{n,0,0;\infty,-,-}$	operatorul lui Lupaș	$V_n^{0,0}((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{X(2n^2-6n)+3n+1}{n(n+2)(n+3)}$	[13]

Tabelul 1: Momentele de ordinul doi - partea I

Notăție	Denumire	Momentul de ordinul doi	Referințe
$V_n^{\alpha,\beta} =$ $R_{\infty,n}^{(n,\alpha,\beta)} =$ $R_n^{n,\alpha,\beta;\infty,-,-}$	operatorul lui Lupaș cu ponderi Jacobi	$V_n^{\alpha,\beta}((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + 5\alpha + 5\beta + 6 - 2n}{(n + \alpha + \beta + 2)(n + \alpha + \beta + 3)} \cdot x^2$ $- \frac{2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 9\alpha + \beta + 6 - 2n}{(n + \alpha + \beta + 2)(n + \alpha + \beta + 3)} \cdot x + \frac{n\alpha^2 + 4n\alpha + \alpha\beta + 3n + \alpha + \beta + 1}{n(n + \alpha + \beta + 2)(n + \alpha + \beta + 3)}$	I. Rașă handwritten notes, 19 August 2008.
$S_n^\alpha =$ $R_{\infty,n}^{(\frac{1}{\alpha},-1,-1)} =$ $R_n^{\frac{1}{\alpha},-1,-1;\infty,-,-}$	operatorul lui Stancu	$S_n^\alpha((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{X(n^2 + 1)}{n(n + 1)}$	[22]
$Q_n^{g,c,d} =$ $R_{\infty,n}^{(n,c,d)} =$ $R_n^{n,g,c,d;\infty,-,-}$	operator de tip Stancu cu parametri c și d	$Q_n^{g,c,d}((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{c^2 + d^2 + 2cd + 5c + 5d + 6 - n\varrho - n\varrho^2}{(n\varrho + c + d + 2)(n\varrho + c + d + 3)} \cdot x^2$ $- \frac{2c^2 + 2cd + 8c + 2d + 6 - n\varrho - n\varrho^2}{(n\varrho + c + d + 2)(n\varrho + c + d + 3)} \cdot x +$ $\frac{nc^2 + 3nc + nc\varrho + n\varrho + 2n + c + d + cd + 1}{n(n\varrho + c + d + 2)(n\varrho + c + d + 3)}$	H. Gonska handwritten notes, 18 March 2009.
$\overline{\mathbb{B}}_n, \mathcal{B}_n^{-1,-1} =$ $R_{\infty,\infty}^{(n,-1,-1)} =$ $R_{\infty,-,-;n,-1,-1} =$ $R_{\infty}^{n,-1,-1;\infty,-,-}$	operatorul Beta de a doua speța al lui Lupaș	$\overline{\mathbb{B}}_n((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{X}{n + 1}$	[12]
$\mathbb{B}_\lambda, T_\lambda =$ $R_{\infty,\infty}^{(\frac{1}{\lambda},-1,-1)} =$ $R_{\infty,-,-;\frac{1}{\lambda},-1,-1} =$ $R_{\infty}^{\frac{1}{\lambda},-1,-1;\infty,-,-}$	operatorul Beta al lui Mühlbach	$\widetilde{\mathbb{B}}_\lambda((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{\lambda X}{1 + \lambda}$	[17]
$\mathbb{B}_n,$ $\mathcal{B}_n^{0,0} = R_{\infty,\infty}^{(n,0,0)} =$ $R_{\infty,-,-;n,0,0} =$ $R_{\infty}^{n,0,0;\infty,-,-}$	operatorul Beta de prima speța al lui Lupaș	$\mathbb{B}_n((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{X(n - 6) + 2}{(n + 2)(n + 3)}$	[12]

Tabelul 2: Momentele de ordinul doi - partea a II-a

Notăție	Denumire	Momentul de ordinul doi	Referințe
$\mathcal{B}_n^{-1,\beta} = R_{\infty,\infty}^{(n,-1,\beta)} =$ $R_{\infty,-,-;n,-1,\beta} =$ $R_{\infty}^{n,-1,\beta;\infty,-,-}$		$\mathcal{B}_n^{-1,\beta}((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{nX + (\beta + 1)(\beta + 2)x^2}{(n + \beta + 1)(n + \beta + 2)}$	[9]
$\mathcal{B}_n^{\alpha,-1} = R_{\infty,\infty}^{(n,\alpha,-1)} =$ $R_{\infty,-,-;n,\alpha,-1} =$ $R_{\infty}^{n,\alpha,-1;\infty,-,-}$		$\mathcal{B}_n^{\alpha,-1}((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{nX + (\alpha + 1)(\alpha + 2)(x - 1)^2}{(n + \alpha + 1)(n + \alpha + 2)}$	[9]
$\mathcal{B}_n^{\alpha,\beta} = R_{\infty,\infty}^{(n,\alpha,\beta)} =$ $R_{\infty,-,-;n,\alpha,\beta} =$ $R_{\infty}^{n,\alpha,\beta;\infty,-,-}$	operatorul Beta cu ponderi Jacobi	$\mathcal{B}_n^{\alpha,\beta}((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + 5\alpha + 5\beta + 6 - n}{(n + \alpha + \beta + 2)(n + \alpha + \beta + 3)} \cdot x^2 -$ $\frac{2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 8\alpha + 2\beta + 6 - n}{(n + \alpha + \beta + 2)(n + \alpha + \beta + 3)} \cdot x +$ $\frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{(n + \alpha + \beta + 2)(n + \alpha + \beta + 3)}$	[9]
$B_n = R_{n,\infty}^{(\infty,-,-)} =$ $R_{\infty,n}^{(\infty,-,-)} =$ $R_n^{\infty,-,-;\infty,-,-}$	operatorul lui Bernstein	$B_n((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{X}{n}$	[1]

∞

Tabelul 3: Momentele de ordinul doi - partea a III-a

Notăție	Denumire	Momentul de ordinul doi	Referințe
$D_n = R_{n,n+1}^{(\infty,-,-)}$		$D_n((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{2X}{n + 1}$	[7]
$R_{m,n}^{\infty} = R_{m,n}^{(\infty,-,-)}$		$R_{m,n}^{\infty}((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{X(n + m - 1)}{nm}$	[23]
$R_{m,n}^{\varrho} = R_{m,n}^{(n\varrho,-1,-1)}$		$R_{m,n}^{\varrho}((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{X(n\varrho + m\varrho - \varrho + m)}{m(n\varrho + 1)}$	[23]

Tabelul 4: Momentele de ordinul doi - pentru operatori BEJ de primul tip

Notăție	Denumire	Momentul de ordinul doi	Referințe
$\mathbb{B}_{\infty}^{(\alpha,\lambda)} = R_{\infty}^{\frac{1}{\alpha}, -1, -1; \frac{1}{\lambda}, -1, -1}$	operatori de tip Beta generalizați	$\mathbb{B}_{\infty}^{\alpha,\lambda}((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{X(\alpha + \lambda + \alpha\lambda)}{(1 + \alpha)(1 + \lambda)}$	[20]
$F_n^{\alpha} = R_n^{\frac{1}{\alpha}, -1, -1; n-1, -1}$	operatorul lui Finta	$F_n^{\alpha}((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{X(n\alpha + \alpha + 2)}{(\alpha + 1)(n + 1)}$	[6]
$\mathbb{B}_n^{(\alpha,\lambda)} = R_n^{\frac{1}{\alpha}, -1, -1; \frac{1}{\lambda}, -1, -1}$	operatorul de tip Beta al lui Pițul	$\mathbb{B}_n^{(\alpha,\lambda)}((e_1 - xe_0)^2; x) := \frac{X(n\alpha + n\lambda + n\alpha\lambda + 1)}{n(1 + \alpha)(1 + \lambda)}$	[20]

Tabelul 5: Momentele de ordinul doi - pentru operatori BEJ de tipul al doilea

Notatie	Momentul de ordinul unu	Diferențe de tipul $T(e_1, e_1; x)$
M_n	$M_n((e_1 - xe_0)^1; x) := \frac{1 - 2 \cdot x}{n+2}$	$T(e_1, e_1; x) := \frac{(2 \cdot n \cdot X + 1) \cdot (n+1)}{(n+2)^2 \cdot (n+3)}$
$D^{<\alpha>}$	$D^{<\alpha>}((e_1 - xe_0)^1; x) := \frac{-2 \cdot x \cdot (\alpha + 1) + \alpha + 1}{n+2 \cdot \alpha + 2}$	$T(e_1, e_1; x) := \frac{X \cdot (2 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 2 \cdot \alpha \cdot n) + 1 + n + 2\alpha + \alpha n + \alpha^2}{(n+2\alpha+2)^2(n+2\alpha+3)}$
M_n^{ab}	$M_n^{ab}((e_1 - xe_0)^1; x) := \frac{a+1-x \cdot (a+b+2)}{n+a+b+2}$	$T(e_1, e_1; x) := \frac{2nX(n+b+1) + n \cdot x^2(b-a) + 1 + n + a + b + an + ab}{(n+a+b+2)^2(n+a+b+3)}$
P_n	$P_n((e_1 - xe_0)^1; x) := \frac{a+1-x(a+b+2)}{n \cdot c + a + b + 2}$	$T(e_1, e_1; x) := \frac{X \cdot n \cdot c^2(n \cdot c + a + b + n + 2) + x \cdot n \cdot c(a+b)}{(nc+a+b+2)^2(nc+a+b+3)}$ $-\frac{10a^2 + 5anc + 15a + 3b + 2a^2nc + 3nc + 2a^2b + 2a^3 + 5ab + 7}{(nc+a+b+2)^2(nc+a+b+3)}$
$V_n^{0,0}$	$V_n^{0,0}((e_1 - xe_0)^1; x) := \frac{1-2x}{n+2}$	$T(e_1, e_1; x) := \frac{2(n+1)(n^2 \cdot X + n + 1)}{n(n+2)^2(n+3)}$
$V_n^{\alpha,\beta}$	$V_n^{\alpha,\beta}((e_1 - xe_0)^1; x) := \frac{\alpha+1-x \cdot (\alpha+\beta+2)}{n+\alpha+\beta+2}$	$T(e_1, e_1; x) := \frac{2n^3 + n^2\beta + n^2\alpha + 2n^2}{(n+\alpha+\beta+2)^2(n+\alpha+\beta+3)n} \cdot x^2$ $+\frac{n\alpha^2 - 2n^2 + n^2\alpha + 2n\alpha - n\beta^2 - 2\beta n - 2n^3 - 3n^2\beta}{(n+\alpha+\beta+2)^2(n+\alpha+\beta+3)n} \cdot x +$ $\frac{-2 - 4n - 3\alpha - 3\beta - n\alpha^2 - 4\alpha\beta - 3\alpha\beta n - \alpha^2 - \beta^2 - 5n\alpha - \beta^2\alpha - 3\beta n - 2n^2 - \alpha^2\beta - 2n^2\alpha}{n(n+\alpha+\beta+2)^2(n+\alpha+\beta+3)}$

Tabelul 6: Diferențe de tipul $T(e_1, e_1; x)$ - Partea I

Notăție	Momentul de ordinul unu	Diferențe de tipul $T(e_1, e_1; x)$
$Q_n^{\rho, c, d}$	$\frac{Q_n^{\rho, c, d}((e_1 - xe_0)^1; x) := c + 1 - x \cdot (c + d + 2)}{n \cdot \rho + c + d + 2}$	$\begin{aligned} T(e_1, e_1; x) := & \frac{2n^2\rho^2 + n^3\rho^2 + n^2\rho^2d + n^2c\rho^2 + n^3\rho^3}{(n\rho + c + d + 2)^2(n\rho + c + d + 3)n} \cdot x^2 \\ & - \frac{-n^2c\rho + n^2d\rho + 2n^2\rho^2 + n^3\rho^2 + n^2\rho^2d + n^2c\rho^2 + n^3\rho^3}{(n\rho + c + d + 2)^2(n\rho + c + d + 3)n} \cdot x + \\ & \frac{-2 - n - 4nc\rho - 2cdn\rho - n^2\rho - nd - 3\rho n - 3c - nc - 4cd - c^2 - d^2 - c^2n\rho}{n(n\rho + c + d + 2)^2(n\rho + c + d + 3)} \\ & + \frac{-n^2c\rho - n^2c\rho^2 - ncd - 3d - d^2c - n^2\rho^2 - c^2d - 2dn\rho}{n(n\rho + c + d + 2)^2(n\rho + c + d + 3)} \end{aligned}$
$\mathbb{B}_n, \mathcal{B}_n^{0,0}$	$\mathbb{B}_n((e_1 - xe_0)^1; x) := \frac{1 - 2x}{n + 2}$	$T(e_1, e_1; x) := \frac{X(n^2 + 12n + 24) + n + 1}{(n + 2)^2(n + 3)}$
$\mathcal{B}_n^{-1, \beta}$	$\mathcal{B}_n^{-1, \beta}((e_1 - xe_0)^1; x) := \frac{-x(\beta + 1)}{n + \beta + 1}$	$T(e_1, e_1; x) := \frac{n^2 \cdot X + n\beta + n}{(n + \beta + 1)^2(n + \beta + 2)}$
$\mathcal{B}_n^{\alpha, -1}$	$\mathcal{B}_n^{\alpha, -1}((e_1 - xe_0)^1; x) := \frac{(\alpha + 1)(1 - x)}{n + \alpha + 1}$	$T(e_1, e_1; x) := \frac{n^2 \cdot X - n \cdot x(1 + \alpha) + n + n \cdot \alpha}{(n + \alpha + 1)^2(n + \alpha + 2)}$
$\mathcal{B}_n^{\alpha, \beta}$	$\mathcal{B}_n^{\alpha, \beta}((e_1 - xe_0)^1; x) := \frac{\alpha + 1 - x(\alpha + \beta + 2)}{n + \alpha + \beta + 2}$	$T(e_1, e_1; x) := \frac{X \cdot n^2 + nx(\beta - \alpha) + \alpha + \beta + \alpha\beta + \alpha n + n + 1}{(n + \alpha + \beta + 2)^2(n + \alpha + \beta + 3)}$

Tabelul 7: Diferențe de tipul $T(e_1, e_1; x)$ - Partea a II-a

Bibliografie

- [1] S.N. Bernstein: Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités, *Comm. Soc. Math. Kharkow* **13** (1912/13), 1-2. [Also appears in Russian translation in Bernstein's Collected Works].
- [2] P. L. Chebyshev: O priblizhennyh vyrazhenijah odnih integralov cherez drugie, *Soobschenija i Protokoly Zasedanij Matematicheskogo Obschestva pri Imperatorskom Khar'kovskom Universitete* **2** (1882), 93–98; *Polnoe Sobranie Sochinenii P. L. Chebysheva. Moskva-Leningrad*, **3**(1978), 128–131.
- [3] P.L. Chebysev: Sur les expressions approximatives des intégrales définies par les autres prises entre les mêmes limites, *Proc. Math. Soc. Kharkov* **2** (1882), 93-98(Russian), translated in *Oeuvres*, **2** (1907), 716-719.
- [4] W. Chen: On the modified Bernstein-Durrmeyer operator. In: *Report of the Fifth Chinese Conference on Approximation Theory*, Zhen Zhou, China, 1987.
- [5] J.L. Durrmeyer: *Une formule d'inversion de la transformée de Laplace: Application à la théorie des moments*, Thèse de 3e cycle, Faculté des Sciences de l'Université de Paris, 1967.
- [6] Z. Finta: Quantitative estimates for some linear and positive operators, *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica* **47** (2002), 71-84.
- [7] H. Gonska, P. Piţul, I. Raşa: On differences of positive linear operators, *Carpathian J. Math.* **22** (2006), 65-78.
- [8] H. Gonska, I. Raşa, M.-D. Rusu: Čebyšev-Grüss-type inequalities revisited, *Math. Slovaca* **63**, no. 5, (2013), 1007–1024.
- [9] H. Gonska, I. Raşa, E.D. Stănilă: Beta operators with Jacobi weights, arXiv: 1402.3485 (2014).
- [10] T.N.T. Goodman, A. Sharma: A Bernstein-type operator on the Simplex, *Math. Balkanica* **5** (1991), 129-145.
- [11] G. Grüss: Über das Maximum des absoluten Betrages von $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$, *Math. Z.* **39** (1935), 215–226.
- [12] A. Lupaş: *Die Folge der Betaoperatoren*, Ph.D. Thesis, Stuttgart: Universität Stuttgart 1972.
- [13] A. Lupaş: The approximation by means of some linear positive operators. In *Approximation Theory* (M.W. Müller et al., eds.), 201-227, Berlin: Akademie-Verlag 1995.
- [14] A. Lupaş, L. Lupaş: Polynomials of binomial type and approximation operators, *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica* XXXII **4**, 1987.

- [15] D.H. Mache, D.X. Zhou: Characterization theorems for the approximation by a family of operators, *J. Approx. Theory* **84** (1996), 145-161.
- [16] Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., Fink, A. M.: Classical and New Inequalities in Analysis, *Dordrecht et al.: Kluwer Academic Publishers*, (1993).
- [17] G. Mühlbach: Rekursionsformeln für die zentralen Momente der Pólya und der Beta-Verteilung, *Metrika* **19** (1972), 171-177.
- [18] R. Păltănea, Sur un opérateur polynomial défini sur l'ensemble des fonctions intégrables. In: *Babeş-Bolyai Univ., Faculty of Math., Research Seminar*, 1983, Vol. 2, pp. 101-106.
- [19] R. Păltănea: A class of Durrmeyer type operators preserving linear functions, *Ann. Tiberiu Popoviciu Sem. Funct. Equat. Approxim. Convex.* (Cluj-Napoca) **5** (2007), 109-117.
- [20] P. Piţul: Evaluation of the approximation order by positive linear operators, Ph.D. Thesis, Cluj-Napoca: Babeş-Bolyai University 2007.
- [21] M. D. Rusu: On Grüss-type inequalities for positive linear operators, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* **56** (2011), no.2, 551–565.
- [22] D.D. Stancu: Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* XIII **8** (1968), 1173-1194.
- [23] E.D. Stănilă: Remarks on Bernstein-Euler-Jacobi (BEJ) type operators, *General Mathematics* Vol. 20, **5** (2012), Special Issue, 123-132.